فصل ۲

توابع همساز

تعاریف توابع تحلیلی و خواص آنها به توابع همساز تعمیم داده شد. توابع همساز در نیمه اول قرن بیستم به طور مختصر معرفی و بررسی شدند و توسط هندسه دیفرانسیل دانانی مانند چوکه [۱] ، کنزه [۲] ، لوی [۳] و رادو [۴] مطالعه گردیدند. پس از آن توابع مختلط همساز توسط نظریه پردازان هندسی توابع، کلونی [۵] و شیل اسمال [۶] گسترش یافت. آنها اصول نظری خانواده ی توابع همساز که بر $\mathbb{D}$ تک ارز می شوند را توسعه دادند. این شاخه از توابع همساز مختلط که تک ارزی آنها روی قرص واحد بررسی می شود تنها در سه دهه اخیر مطالعه و فرمولبندی شده و از آنجا که تصور می شد که این خانواده از توابع، تعمیمی از توابع تحلیلی خواهند بود بیشتر مورد توجه قرار گرفت و بدین ترتیب غالب موضوعاتی را که درباره توابع تحلیلی مطرح بوده و هست را روی این خانواده بررسی می نمایند.

در این فصل $u(x,y):\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ را تابع همساز حقیقی [۷] نامیم اگر در معادله ی $u_{xx}+u_{yy}=۰$ که به معادله لاپلاس [۸] شهرت دارد صدق نماید. معادله لاپلاس در خیلی از علوم کاربردی ظاهر می

[۱] Gustave Choquet (1915-2006)

[۲] Adolf Kneser (1862-1930)

[۳] Hans Lewy (1904-1988)

[۴] Richard Radó (1906-1989)

[۵] Clunie

[۶] Sheil-Small

[۷] Harmonic real function

[۸] Laplace equation

شود مثلاً در بسیاری از مسائل فیزیکی نظیر هیدرودینامیک[۹] و پتانسیل سرعت[۱۰]. معادلات جریان سیالات[۱۱] در معادله لاپلاس صدق می‌کنند و نیز رابطه‌ی پتانسیل الکترواستاتیک[۱۲] دارای این خاصیت است. همچنین معادله لاپلاس ارتباطات مهمی با فرایندهای احتمالاتی[۱۳] و تصادفی نیز این معادله بخوبی ظاهر شده و در مباحث مهندسی نیز استفاده از آن امری ضروری بشمار می رود.

۱.۲ نگاشت های همساز حقیقی تک ارز

هر تابع همساز از رده ی C^∞ بوده و بی نهایت بار مشتقپذیر است. بعلاوه هر تابع همساز بر یک دامنه ی همبندساده، قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است که بر آن ناحیه تعریف می گردد. همچنین

لم ۱.۱.۲. [۳۹] تابع همساز دارای خاصیت مقدار میانگین بوده و در نتیجه در اصل مقدار ماکزیمم[۱۴] صدق می کند. توابع همساز حقیقی در اصل مقدار مینیمم[۱۵] هم صادق بوده و اگر f تابعی همساز بر دامنه ی $|z| < \rho$، (برای $\rho > ۰$)، تعریف شده باشد سپس برای هر $۰ < r < \rho$

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} \frac{r^۲ - |z|^۲}{|re^{i\theta} - z|^۲} f(re^{i\theta})d\theta, \quad ; \quad |z| < r. \tag{۱.۲}$$

لم ۲.۱.۲. (فرمول انتگرال پواسن[۱۶] [۳۹]). گیریم f تابعی همساز روی دامنه $|z| < \rho$ باشد که $\rho > ۰$. آنگاه برای هر $۰ < r < \rho$،

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_۰^{۲\pi} \frac{r^۲ - |z|^۲}{|re^{i\theta} - z|^۲} f(re^{i\theta})d\theta, \quad ; \quad |z| < r. \tag{۲.۲}$$

این توابع را می توان تعمیمی از نگاشتهای تحلیلی بحساب آورد.

---

[۹] Hydrodynamics
[۱۰] Velocity potential
[۱۱] Fluid flow
[۱۲] Electrostatics potential
[۱۳] Stochastic processes
[۱۴] Maximum Modulus Principle
[۱۵] Minimum Modulus Principle
[۱۶] Poisson integral formula

۲.۲ نگاشتهای تک ارز همساز مختلط

در ادامه از نگاشتهای همساز مسطح[۱۷] صحبت خواهیم کرد که تعمیم نگاشت های همساز حقیقی[۱۸] تک ارز هستند. فرض کنید H خانواده ی توابع مختلط پیوسته باشد که بر قرص واحد $\mathbb{D}$ همسازند. گیریم $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. تابع $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ تابع همساز مختلط[۱۹] است اگر f پیوسته باشد و u و v در D همساز حقیقی باشند. در حالت کلی u و v لزوما مزدوج همساز[۲۰] نیستند زیرا در غیر این حالت، تابع f تحلیلی بوده و مورد بحث ما نیست.
اگر D همبند ساده باشد، در این صورت نمایش استانداردی برای f خواهیم داشت [۲۵]:

لم ۱.۲.۲. [۳۰] گیریم D دامنه ای همبند ساده و $f = u + iv$ در D همساز باشد. سپس f دارای نمایش کانونی[۲۱] $f = h + \overline{g}$ است که h و g در D تحلیلی می باشند. h را بخش تحلیلی و g را بخش هم تحلیلی[۲۲] تابع f خوانیم.

حال به فرض $f(0) = 0$ در دامنه ی $\mathbb{D}$، می توان توابع تحلیلی h و g را با بسطهای سری تیلور $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ نشان دهیم بدینترتیب f دارای نمایش سری به شکل

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \tag{۳.۲}$$

خواهد بود. ژاکوبین[۲۳] تابع $f = u + iv$ عبارتست از

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$$

که از محاسبات زیر حاصل می شود:

$$f_z = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y) = \frac{1}{2}\Big(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\Big)$$
$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y) = \frac{1}{2}\Big(u_x - v_y + i(v_x + u_y)\Big)$$
$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = \frac{1}{4}\Big((u_x + v_y)^2 + (v_x - u_y)^2 - (u_x - v_y)^2 - (v_x + u_y)^2\Big) = u_x v_y - u_y v_x$$

اگر f تحلیلی باشد، ژاکوبین فرم زیر را بخود می گیرد

$$J_f(z) = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

[۱۷] Planar harmonic mappings
[۱۸] Real-Value Harmonic Maps
[۱۹] Complex-valued harmonic function
[۲۰] Harmonic conjugates
[۲۱] Canonical representation
[۲۲] Co-analytic
[۲۳] Jacobian

گوئیم نگاشت همساز $f = h+\overline{g}$ در $z = a$ جهت نگهدار[۲۴] است اگر $J_f(a) > 0$ یعنی $|h'(a)|^2 - |g'(a)|^2 > 0$ یا $|h'(a)| > |g'(a)|$. با فرض $\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ سپس $f = h + \overline{g}$ در $z = a$ جهت نگهدار است اگر $|\omega(a)| < 1$ و آنرا جهت برگردان[۲۵] در این نقطه گوئیم اگر $|\omega(a)| > 1$. تابع $\omega(z)$ تابعی تحلیلی روی $\mathbb{D}$ بوده و انبساط مختلط دوم[۲۶] f نامیده می شود. توجه کنید که $\omega(z) = 0$ اگر و فقط اگر f تحلیلی باشد. بالاخره اینکه نمایش $f = h + \overline{g}$ معادل با نمایش سودمند $f = \mathbf{Re}\,(h+g) + i\mathbf{Im}(h-g)$ است.

لم ۲.۲.۲. [۳۰] همه ی نقاط بحرانی تابع همساز غیرثابت مجزا هستند.

قضیه ۱.۲.۲. (قضیه لوی[۲۷] [۳۰]) اگر f تابع همساز مختلطی باشد که در یک دامنه ی $D \subset \mathbb{C}$ موضعا تک ارز است، آنگاه ژاکوبین آن برای $z \in D$ ناصفر است $J_f(z) \neq 0$.

بنابراین از دید قضیه لوی، تابع همساز مختلطی که در یک دامنه موضعا تک ارز و جهت نگهدار باشد، در آن دامنه ژاکوبین مثبت دارد. اگر $J_f < 0$، سپس $\overline{f}$ جهت نگهدار است.

فرمول انتگرال پواسن برای نگاشتهای همساز مختلط نیز صحیح است [۳۰].

۳.۲ رده ی S_H

بعنوان تعمیمی از شکل همساز $\mathcal{A}$، گیریم $\mathcal{H}$ رده ی توابع مختلطی به شکل $f = h+\overline{g}$ باشدکه روی $\mathbb{D}$ همسازند و h و g توابع تحلیلی نرمالشده روی $\mathbb{D}$ چنان هستند که

$$f(z) = h + \overline{g} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{b_n}\overline{z}^n \tag{۴.۲}$$

تعمیمی از رده S روی توابع همساز وجود دارد که بسیاری از خواص رده ی قبل را حفظ می کند. در نظر بگیرید که S_H خانواده ی تمام توابع همساز تک ارز مختلطی به شکل (۳.۲) است که روی $\mathbb{D}$ جهت نگهدار بوده و با شروط $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ نرمال شده اند. پس هر عضو $f \in S_H$ دارای بسط سری (۴.۲) خواهد بود. این رده ابتدا توسط کلونی و شیل_سمال در ۱۹۸۴ مطالعه شد [۲۵] و سپس خواص دیگری از آن بدست آمد که در مطالعه ی توابع همساز مسطح سودمند بنظر می رسیدند.

۴.۲ رده ی S_H^0

اکنون توابع رده ی $f \in S_H$ را چنان محدود می کنیم که $b_1 = 0 = f_{\overline{z}}(0) = \overline{g'(0)}$ باشد و این رده را با S_H^0 نمایش می دهیم. روشن است که $S \subset S_H^0 \subset S_H$ و ثابت می شود که خانواده ی

[۲۴] Sense-preserving
[۲۵] Sense-reserving
[۲۶] Second complex dilatation
[۲۷] Lewy

نرمال فشرده است و این در حالی است که S_H چنین نیست. این خانواده تحت مزدوج سازی، چرخش، انبساط، خودریختی قرص و انتقال برد حفظ می شود. شبیه به حدس بیبرباخ در رده ی S، در اینجا نیز حدس بیبرباخ همساز[۲۸] مطرح می شود: فرض کنید $f(z) \in S_H^\circ$ تابع همساز به شکل (۴.۲) باشد آنگاه

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \quad (۵.۲)$$

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{6}(n-1)(2n-1) \quad (۶.۲)$$

$$||a_n| - |b_n|| \leqslant 1 \quad (۷.۲)$$

با وجود اینکه این حدس یک مسئله ی باز بشمار می رود، در برخی زیررده های آن به اثبات رسیده است. همچنین برای تمام توابع $f(z) \in S_H^\circ$ داریم $|a_2| < 49$ که بهترین کران شناخته شده است. ایضا

لم ۱.۴.۲. [۳۰] برای تمام توابع $f(z) \in S_H^\circ$، نامساوی دقیق $|b_2| \leqslant \frac{1}{2}$ برقرار است.

۵.۲ روش برش

ایجاد روش ساختار برشی[۲۹] در ابتدا توسط کلونی و شیل_سمال در ۱۹۸۴ معرفی گردید [۲۵] و جهت مطالعه ی توابع همساز مسطح بکار گرفته شد. این تکنیک روش ساختن یک نگاشت همساز تک ارز را در صفحه بیان می کند و یکی از خصوصیات مهم آن استفاده از توابع تحلیلی مرتبط با آن می باشد، و بنابراین آگاهی از این روش در کار با توابع همساز بسیار ضروری است.

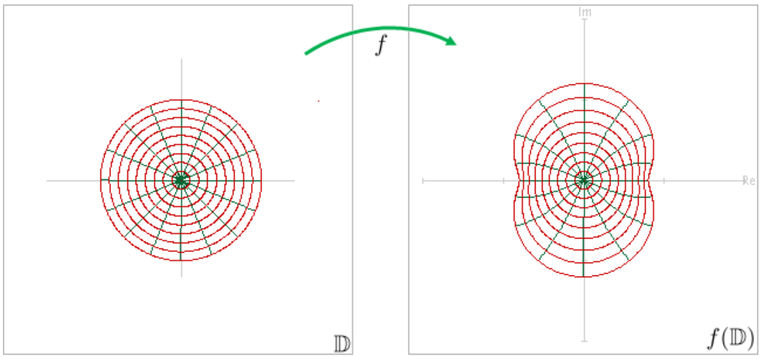
لم ۱.۵.۲. [۳۰] فرض کنید $f = h + \bar{g}$ در $\mathbb{D}$ همساز و موضعا تک ارز باشد. سپس f تک ارز و بردش CHD است اگر و تنها اگر $h - g$ تک ارز و بردش CHD باشد.

برای استفاده از تکنیک برش، با بکارگیری لم فوق و $F = h - g$ تک ارز مفروضی با برد CHD همراه با یک انبساط $\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$ خواسته شده، می توان تابع همساز تک ارز $f = h + \bar{g}$ را با برد CHD یافت. طی این فرآیند فرض $|\omega(z)| < 1$ برای جهت نگهداربودن f ضروری است (قضیه ۱.۲.۲).

مثال ۱.۵.۲. تابع $F = z - \frac{1}{6}z^3$ با برد CHD مفروض است (شکل۱.۲). می خواهیم نگاشت همساز تک ارز $f = h + \bar{g}$ را با انبساط $\omega(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}z$ بیابیم. تابع f جهت نگهدار خواهد بود زیرا $|\omega(z)| = |\frac{1}{\sqrt{2}}z| < 1$. می نویسیم $h - g = z - \frac{1}{6}z^3$ و $\frac{g'(z)}{h'(z)} = \frac{1}{\sqrt{2}}z$ بنابراین

[۲۸] Harmonic Bieberbach conjecture

[۲۹] Shearing construction technique



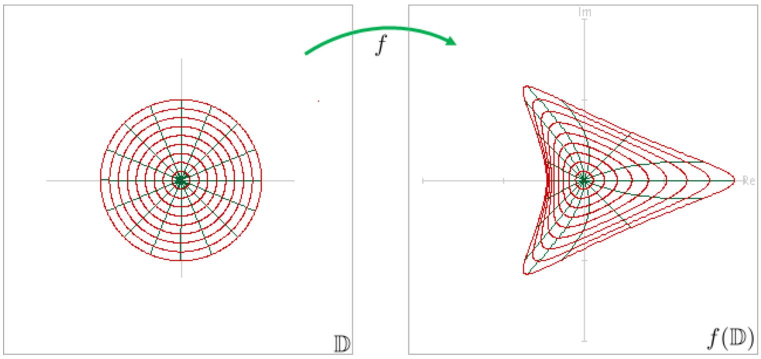
شکل ۱.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همدیس $F = z - \frac{1}{6}z^3$.

$$\begin{cases} h' - g' = 1 - \frac{1}{2}z^2 \\ g' = \frac{1}{\sqrt{2}} z h' \end{cases} \quad \begin{cases} h'(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} z \\ g'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} z + \frac{1}{2} z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} h(z) = z + \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 \\ g(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 + \frac{1}{6} z^3 \end{cases}$$

توجه کنید که $h(0) = g(0) = 0$ و بدینصورت نگاشت همساز تک ارز

$$f = h + \overline{g} = z + \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \overline{z}^2 + \frac{1}{6} \overline{z}^3$$

با برد CHD حاصل می گردد (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت $f = z + \frac{1}{2\sqrt{2}} z^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \overline{z}^2 + \frac{1}{6} \overline{z}^3$.

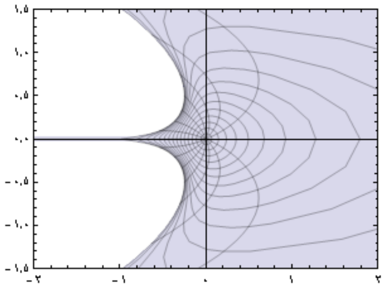
مثال ۲.۵.۲. فرض کنید $F = \frac{z}{1 - z}$ که تک ارز محدب است (شکل ۲.۱). می خواهیم نگاشت همساز تک ارز $f = h + \overline{g}$ را با انبساط $\omega(z) = z^2$ بسازیم. شرط $|\omega(z)| = |z^2| < 1$ موضعا تک ارزی f را تضمین می کند. گیریم $h - g = \frac{z}{1 - z}$ و $\frac{g'(z)}{h'(z)} = z^2$ و بنابراین

$$\begin{cases} h' - g' = \frac{1}{(1-z)^2} \\ g' = z^2 h' \end{cases} \quad \begin{cases} h'(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-z)^2} \\ g'(z) = \frac{z^2}{(1-z^2)(1-z)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} h(z) = \frac{z-2}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8} \log \frac{z+1}{z-1} + \frac{i\pi}{8} - \frac{1}{2} \\ g(z) = \frac{3z-2}{4(z-1)^2} + \frac{1}{8} \log \frac{z+1}{z-1} + \frac{i\pi}{8} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

با ثابت انتگرالگیری $h(0)=g(0)=0$ و بعد

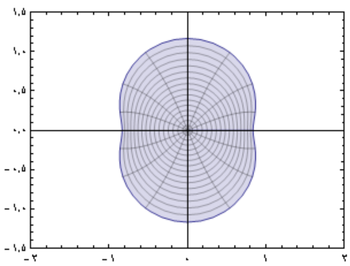
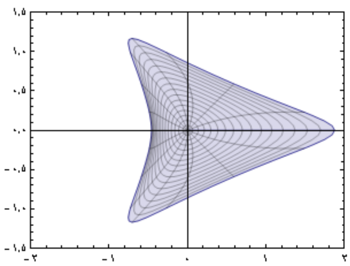
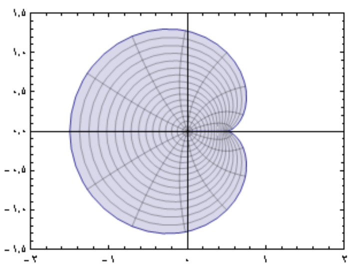
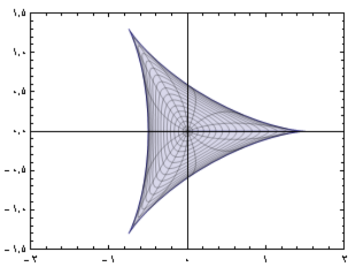
$$f=h+\overline{g}=-\frac{1}{2}\frac{z}{(1-z)^2}+2\mathbf{Re}\left(\frac{3z-2}{4(z-1)^2}+\frac{1}{8}\log\frac{z+1}{z-1}\right)$$

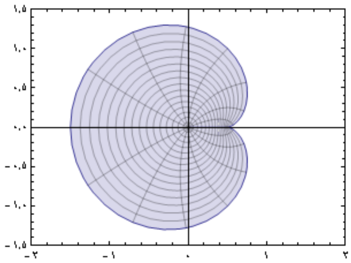
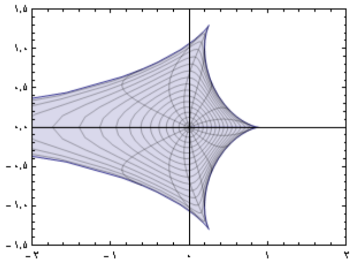
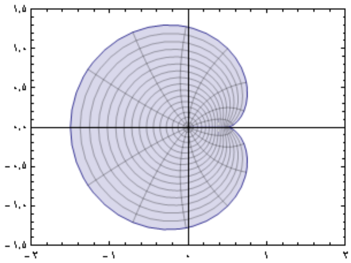
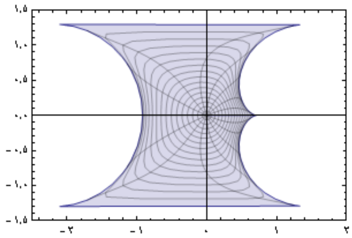
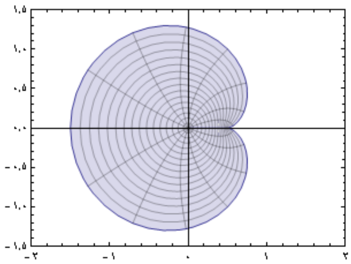
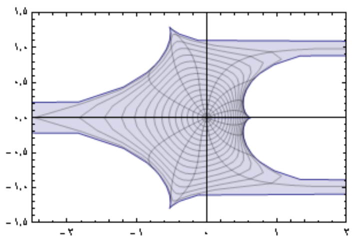
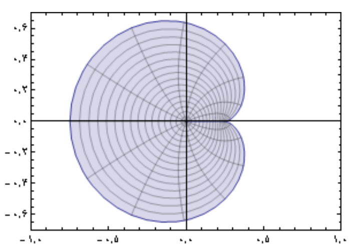
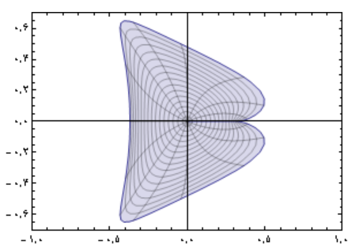
نگاشت CHD مطلوب خواهد بود (شکل ۳.۲).

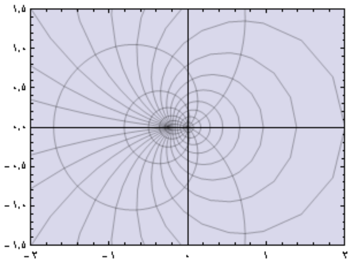
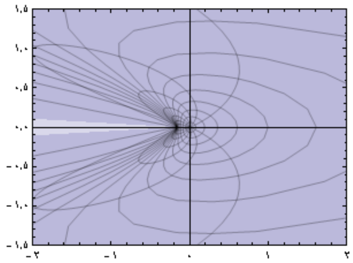


شکل ۳.۲: تصویر $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز f در مثال ۲.۵.۲.

در ذیل چند نگاشت که با تکنیک برشی حاصل شده اند را با رسم شکل‌شان خواهیم آورد. در اینجا نیز نگاشت تحلیلی با برد CHD مانند F داده شده و با انبساط خاص ω در نظر گرفته می شود، سپس نگاشت همساز تک ارز f که برد CHD است، متناظر با آن ساخته می شود. سرانجام تصویر قرص یکه را تحت F و f آورده ایم:

–	F	f
$\begin{cases} F=z-\frac{1}{6}z^3 \\ \omega=\frac{1}{\sqrt{2}}z \\ h=z+\frac{1}{2\sqrt{2}}z^2 \\ g=\frac{1}{2\sqrt{2}}z^2+\frac{1}{6}z^3 \\ f=z+\frac{1}{2\sqrt{2}}z^2 \\ +\frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{z}^2+\frac{1}{6}\overline{z}^3 \end{cases}$		
$\begin{cases} F=z-\frac{1}{2}z^2 \\ \omega=z \\ h=z \\ g=\frac{1}{2}z^2 \\ f=z+\frac{1}{2}\overline{z}^2 \end{cases}$		

$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^2 \\ h = \log(1+z) \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 \\ \quad + \log(1+z) \\ f = 2\,\mathbf{Re}\,\log(1+z) \\ \quad - \overline{z} + \frac{1}{2}\overline{z}^2 \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^3 \\ h = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) \\ \quad - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ \quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}) \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = z^4 \\ h = \frac{1}{4} \log \frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{\tan^{-1} z}{2} \\ g = -z + \frac{1}{2}z^2 \\ + \frac{1}{4} \log \frac{(1+z)^2}{1+z^2} + \frac{\tan^{-1} z}{2} \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		
$\begin{cases} F = z - \frac{1}{2}z^2 \\ \omega = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 \\ h = \log \frac{4}{z^2 - 2z + 4} \\ g = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 \\ \quad + \log \frac{4}{z^2 - 2z + 4} \\ f = h + \overline{g} \end{cases}$		

$\begin{cases} k_\circ = \frac{z}{(1-z)^2} \\ \omega = z \\ h = \frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \\ g = \frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} \\ f = \mathbf{Re}\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} \\ \quad + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} \end{cases}$		

در ردیف انتهای جدول، با استفاده از تابع کوبه تحلیلی $k_\circ(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ و انبساط $\omega = z$ تابع کوئب (احتمالی) همساز [۳۰]

$$f(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2}$$

ساخته شده است. انتظار می رود این تابع

$$k_{\circ H}(z) = \mathbf{Re}\,\frac{z+\frac{1}{3}z^3}{(1-z)^3} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \frac{\frac{1}{2}\bar{z}^2+\frac{1}{6}\bar{z}^3}{(1-\bar{z})^3} \in \mathcal{S}_H^\circ \qquad (۸.۲)$$

نقش تابع کرانی را در رده ی $\mathcal{S}_H^\circ$ بازی نماید. تابع $k_{\circ H}(z)$ قرص $\mathbb{D}$ را به تمام صفحه منهای قسمتی از محور حقیقی منفی، از $-\frac{1}{6}$ تا ∞ می نگارد. ضرایب این تابع در

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{6}(n+1)(2n+1) \quad , \quad |b_n| \leqslant \frac{1}{6}(n-1)(2n-1) \qquad (۹.۲)$$

صدق می کنند [۳۰]. البته این مسئله که تمام توابع $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ برای تمام اندیسهای n ، ضرایب h و g می بایست در (۹.۲) صدق نمایند هنوز هم مسئله ی باز تلقی می شود. همچنین انتظار می رود که مانند قضیه یک_چهارم کوبه، برد هر تابع در $\mathcal{S}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \frac{1}{6}$ شود اما تاکنون چنین ثابت شده که

لم ۲.۵.۲. [۲۵] برد هر تابع $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ شامل قرص $|w| < \frac{1}{16}$ است.

بعنوان مسئله ی باز چنین عنوان می شود که مثالهایی از توابع تک ارز همساز ارائه دهید که انبساط آنها توابع داخلی منفرد [۳۱] و خواص آنها را نیز بررسی نمائید.

[۳۰] Harmonic Koebe function
[۳۱] Singular inner function

۶.۲ توابع همساز ستاره‌گون

از لحاظ تحلیلی تابع همساز f ستاره‌گون است اگر $\arg\{f(e^{i\theta})\}$ یعنی آرگومان باید تابعی غیرنزولی برحسب θ باشد، بعبارتی

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\} \geq ۰$$

رده تمام توابع همساز ستاره‌گون در $\mathcal{S}_H$ با $\mathcal{S}_H^*$ نمایش داده شده که در تحدید به $\mathcal{S}_H^\circ$ بشکل $\mathcal{S}_H^{\circ *}$ مشخص می شود. یکی از شروط کافی برای ستاره‌گونی چنین است:

لم ۱.۶.۲. (سیلورمن [۹۶]، آهوجا[۳۲] [۲]) اگر ضرایب (۴.۲) در $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \leqslant ۱$ صدق کنند، آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^*$.

زیررده $\mathcal{S}_H^\circ$ از $\mathcal{S}_H$ شامل همه توابع $f \in \mathcal{S}_H$ با شرط $f_{\overline{z}}(۰) = ۱$ است ، پس $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_H^\circ \subset \mathcal{S}_H$. کلونی و شیل_سمال توابع ستاره‌گون در $\mathcal{S}_H$ با عنوان زیررده $\mathcal{S}_H^*$ بررسی کردند. برخلاف ستاره‌گونی در توابع تحلیلی، روی رده ی توابع $\mathcal{S}_H^*$ ستاره‌گونی خاصیتی ارثی نیست، در واقع لزومی ندارد که تصویر هر زیرقرص $|z| < r < ۱$ خود، ناحیه ای ستاره‌گون (نسبت به مبداء) باشد [۳۰، ۳، ۷۹]. بنابراین به خاصیتی نیازمندیم تا ستاره‌گونی را برای توابع همساز موروثی کند:

تعریف ۱.۶.۲. تابع همساز f با شرط $f(۰) = ۰$ را کاملاً ستاره‌گون[۳۳] نامیم اگر هر دایره ی $|z| = r < ۱$ را به صورت یک به یک به منحنی بسته ای که مرز ناحیه ای ستاره‌گون نسبت به مبداء است بنگارد.

در حالت کلی یک تابع کاملاً ستاره‌گون لزوماً تک ارز نیست ([۲۴]، ص۱۴)، ولی می توانیم خود را محدود به $\mathcal{S}_H$ کنیم. قابل توجه اینکه یک نگاشت کاملاً ستاره‌گون جهت نگهدار در $\mathbb{D}$ تک ارز است. برای $f \in \mathcal{S}_H$، خانواده همه توابع کاملاً ستاره‌گون را با $\mathcal{FS}_H^*$ مشخص می کنیم. در ۱۹۸۰ موکانو رابطه ای را بین کاملا ستاره‌گونی عملگر مشتق یک تابع غیرتحلیلی بیان کرد [۶۴]. برای تابع مختلط f عملگر دیفرانسیلی

$$Df = zf_z - \overline{z}f_{\overline{z}} \qquad (۱۰.۲)$$

را در نظر می گیریم. در اینصورت می توان دید که برای تابع مختلط جهت نگهدار $f(z)$ داریم $Df \neq ۰$ و نیز

$$D^۲ f = D(Df) = zf_z + \overline{z}f_{\overline{z}} + zzf_{zz} + \overline{zz}f_{\overline{zz}} \qquad (۱۱.۲)$$

[۳۲] Ahuja

[۳۳] Fully-starlike

برای تابع مختلط جهت نگهدار $f(z)$، که $Df \neq 0$. اگر برای تمام $z \in \mathbb{D}-\{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$، و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ بوده و در شرط $\mathbf{Re}\,\dfrac{Df(z)}{f(z)} > 0$ یا $\mathbf{Re}\,\dfrac{D^2 f(z)}{Df(z)} > 0$ برای $z \in \mathbb{D}-\{0\}$ صدق نماید، سپس f هر دایره $0 < |z| = r < 1$ را به منحنی ساده بسته می نگارد [۶۴]، و از

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(e^{i\theta})\} = \mathbf{Re}\,\frac{Df(z)}{f(z)}$$

داریم:

لم ۲.۶.۲. (موکانو [۶۴]) گیریم $f \in C^1(\mathbb{D})$ تابع مختلطی با $f(0) = 0$ باشد. اگر برای $z \in \mathbb{D}-\{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ و $\mathbf{Re}\,\dfrac{Df(z)}{f(z)} > 0$ برقرار باشند سپس f در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً ستاره‌گون است.

زیر رده ی $\mathcal{S}_H^{\circ *}(\alpha)$ از رده ی توابع $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را که به توابع همساز ستاره‌گون از مرتبه ی α، $(0 \leqslant \alpha < 1)$ معروف است توسط جهانگیری[۳۴] معرفی شد [۴۷] . وی ثابت کرد که $f \in \mathcal{S}_H^{\circ *}(\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n| \leqslant 1 \tag{۱۲.۲}$$

۷.۲ توابع همساز محدب

می دانیم که f تابعی محدب است اگر در $f(\mathbb{D})$ عبارت $\arg\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\}$ تابعی غیرنزولی برحسب θ باشد. بعبارتی دیگر

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} \geq 0$$

رده ی تمام توابع محدب در $\mathcal{S}_H$ را با $\mathcal{K}_H$ نشان داده و زیر رده ی $\mathcal{K}_H^{\circ}$ نیز توابع محدب در $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را مشخص می کند.

لم ۱.۷.۲. (کلونی و شیل_سمال [۲۵]) برای f با نمایش کانونی (۳.۲)، اگر $f \in \mathcal{K}_H$ سپس برای $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$|A_n| \leqslant \frac{n-1}{2}|B_1| + \frac{n+1}{2}\ ,\ \ |B_n| \leqslant \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2}|B_1|$$

برای $n \geq 2$ نیز خواهیم داشت $|A_n| < n$ و $|B_n| < n$.

لم ۲.۷.۲. (سیلورمن [۹۶]، [۲]) اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^2|b_n| \leqslant 1$ سپس $f \in \mathcal{K}_H$.

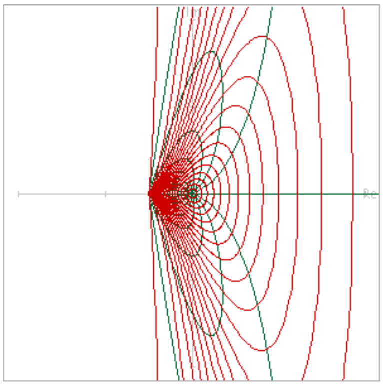
برخلاف توابع تحلیلی، تحدب روی رده ی $\mathcal{K}_H$ خاصیتی موروثی ندارد، یعنی لازم نیست که تصویر هر زیرقرص $|z| < r < 1$ تحت f خود ناحیه ای محدب باشد. اگر f نگاشتی تک ارز

[۳۴] Jahangiri

روی $\mathbb{D}$ به ناحیه ای محدب باشد، آنگاه تصویر هر قرص $|z| < r$ برای هر شعاع $r \leqslant \sqrt{2} - 1$ محدب خواهد بود ولی برای شعاعی در بازه ی $\sqrt{2} - 1 < r < 1$ این موضوع درست نیست.
کافی است تابع

$$f(z) = \mathbf{Re}\frac{z}{1-z} + i\mathbf{Im}\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z - \frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2} + \frac{-\frac{1}{2}\bar{z}^2}{(1-\bar{z})^2} \in \mathcal{K}_H \tag{۱۳.۲}$$

را در نظر بگیریم که $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه ی $\mathbf{Re}\, w > -\frac{1}{2}$ می نگارد. تصویر هر قرص $|z| \leqslant r$ برای هر r در $\sqrt{2} - 1 < r < 1$ محدب نیست (شکل ۴.۲).



شکل ۴.۲: تصویر قرص $\mathbb{D}$ تحت نگاشت همساز (۱۳.۲).

لازم است تعریفی ارائه دهیم که خاصیت ارثی تحدب را منتقل نماید:

تعریف ۱.۷.۲. [۲۴، ۷۹] تابع همساز f روی قرص واحد را کاملاً محدب[۳۵] نامیم اگر $f(0) = 0$ بوده و هر دایره ی $|z| = r < 1$ را در وضعیتی یک به یک به مرز یک ناحیه محدبی در برد بنگارد.

در حالت خاصی که برای $0 < |z| < 1$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ طبق قضیه ی رادو[۳۶]ـ کنزه[۳۷]ـ چوکه[۳۸] نگاشت کاملاً محدب در $\mathbb{D}$ لزوماً تک ارز خواهد شد ([۳۰]، بخش ۱.۳).
زیرده ی تمام توابع کاملاً محدب از توابع S_H را در $\mathbb{D}$ با $\mathcal{FK}_H$ نشان می دهیم. اگر برای همه ی $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z) > 0$ باشد، آنگاه [۶۴]

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} = \mathbf{Re}\frac{D^2 f(z)}{Df(z)}$$

بنابراین

[۳۵] Fully-convex
[۳۶] Radó
[۳۷] Kneser
[۳۸] Choquet

لم ۳.۷.۲. (موکانو [۶۴]) گیریم $f \in C^{2}(\mathbb{D})$ تابعی مختلط باشد که $f(0)=0$، برای همه ی $z \in \mathbb{D}-\{0\}$ داشته باشیم $f(z) \neq 0$ و در $\mathbb{D}$ نیز $J_f(z)>0$ بوده و $\mathbf{Re}\,\dfrac{D^{2}f(z)}{Df(z)}>0$ باشد، آنگاه f در $\mathbb{D}$ تک ارز و کاملاً ـ محدب است.

تابع همساز f تک ارز و محدب است اگر و فقط اگر برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، تابع تحلیلی $e^{i\alpha}h-e^{i\alpha}g$ تک ارز و محدب در جهت افقی باشد. علاوه بر این، شرطی لازم و کافی برای آنکه تابعی کاملاً محدب باشد توسط چوکه[۳۹]، دورن[۴۰] و آسگود[۴۱] مطرح شد ([۲۴] ص۱۳۹).

قضیه ۱.۷.۲. [۲۴] گیریم $f(z) \in \mathcal{S}_H$. $f \in \mathcal{UK}_H$ اگر و فقط اگر

$$|zh'(z)|^{2}\mathbf{Re}\,Q_h \geqslant |zg'(z)|^{2}\mathbf{Re}\,Q_g + \mathbf{Re}\left\{z^{3}\left(h''(z)g'(z)-h'(z)g''(z)\right)\right\} \tag{۱۴.۲}$$

که $Q_h = 1+z\dfrac{h''(z)}{h'(z)}$ و $Q_g = 1+z\dfrac{g''(z)}{g'(z)}$ بازای هر z در $\mathbb{D}$.

تابع همساز تک ارز f در D را محدب در جهت α گوئیم اگر $f(\mathbb{D})$ محدب در جهت α باشد.
رده ی $\mathcal{K}_H^{\circ}(\alpha)$ از زیر رده های $\mathcal{S}_H^{\circ}$ شامل همه ی توابع محدب از مرتبه ی α، $(0 \leqslant \alpha < 1)$ است که در شرط

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(e^{i\theta})\right\} \geq \alpha$$

صدق می کنند و داریم

لم ۴.۷.۲. (جهانگیری [۴۷]) اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n| \leqslant 1 \tag{۱۵.۲}$$

آنگاه $f \in \mathcal{K}_H^{\circ}(\alpha)$.

۸.۲ توابع همساز نزدیک ـ به ـ محدب

تابع همساز $f(z) \in \mathcal{S}_H$ را نزدیک به محدب گوئیم اگر بردش $f(\mathbb{D})$ دامنه ای نزدیک ـ به ـ محدب باشد. رده ی همه ی توابع نزدیک ـ به ـ محدب از $\mathcal{S}_H$ را با $\mathcal{C}_H$ نشان داده و زیر رده ی محدود به $\mathcal{S}_H^{\circ}$ را با $\mathcal{C}_H^{\circ}$ مشخص می کنیم.

لم ۱.۸.۲. [۲۵] گیریم $f=h+\overline{g}$ در $\mathbb{D}$ موضعا تک ارز بوده و $h+\epsilon g$ برای $|\epsilon| \leqslant 1$ ی محدب باشد، آنگاه f در $\mathbb{D}$ تک ارز و نزدیک ـ به ـ محدب است.

[۳۹] Martin Chuaqui
[۴۰] Peter Duren
[۴۱] Brad Osgood

۹.۲ پیچش

پیچش دو تابع همساز $f(z)$ و $F(z)$ با نمایش های کانونی

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_n}\overline{z}^n \tag{۱۶.۲}$$

$$F(z)=H(z)+\overline{G(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}\overline{z}^n \tag{۱۷.۲}$$

چنین تعریف می شود:

$$(f*F)(z)=(h*H)(z)+\overline{g*G(z)}=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nA_nz^n+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{b_nB_n}\overline{z}^n \tag{۱۸.۲}$$

برخلاف حالت تحلیلی، پیچش دو تابع همساز لزوماً خواص رده را حفظ نمی کند. مثلاً گیریم

$$f(z)=h(z)+\overline{g(z)}=\frac{z}{1-z}$$

با انبساط $\omega(z)=-z$ باشد پس $f\in\mathcal{K}_H^{\circ}$ و

$$F(z)=H(z)+\overline{G(z)}=\frac{z}{1-z}$$

با انبساط $\omega(z)=-z^n$ را نیز در نظر بگیرید که $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$ خواهد بود. برای $n\in\mathbb{N}$ (که $n\geq 3$)، پیچش $(f*F)(z)$ در $\mathbb{D}$ حتی موضعاً تک ارز هم نیست [۲۹].

لم ۱.۹.۲. (کلونی و شیل_سمال [۲۵]) اگر $\phi\in\mathcal{K}$ و $F\in\mathcal{K}_H$ آنگاه

$$(\phi+\epsilon\overline{\phi})*F\in\mathcal{C}_H$$

بازای $|\epsilon|\leqslant 1$.

آهوجا و دیگران [۲] نشان دادند که در لم فوق، شرط تحدب ϕ را نمی توان با ستاره‌گونی تعویض نمود. برای مثال تابع تحلیلی ستاره‌گون $\phi(z)=z+\frac{1}{n}z^n$ در $\mathbb{D}$ را با $\epsilon=0$ در نظر بگیرید. فرض کنید

$$F(z)=h+\overline{g}=\frac{z-\frac{1}{2}z^2}{(1-z)^2}+\frac{-\frac{1}{2}\overline{z}^2}{(1-\overline{z}^2)^2}\in\mathcal{K}_H$$

در اینصورت تابع پیچش

$$(\phi+0\overline{\phi})*F=z+\frac{n+1}{2n}z^n \quad , \quad n\geq 2$$

حتی در $\mathbb{D}$ تک ارز هم نخواهد بود.

لم ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم h و g در $\mathbb{D}$ تحلیلی بوده و $|g'(\circ)| < |h'(\circ)|$ باشد و نیز $h+\epsilon g$ در $\mathbb{D}$ برای هر $|\epsilon| = ۱$ نزدیک‌ـبه‌ـمحدب شود. در اینصورت

$$h+\overline{g} \in \mathcal{C}_H$$

اگر ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی و محدب باشد آنگاه

$$(\phi+\sigma\overline{\phi}) * (h+\overline{g}) \in \mathcal{C}_H \quad , \quad |\sigma| = ۱$$

کلونی و شیل‌ـسمال در مقاله ی خود سوالی در این موضوع را مطرح نمودند که برای چه توابع همساز ϕ ی با $f \in \mathcal{K}_H$، خواهیم داشت $\phi * f \in \mathcal{K}_H$. این سوال به طور جزئی توسط روشه ویه و سالیناس[۴۲] [۹۱] پاسخ داده شد. آنها ثابت کردند که اگر ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی باشد سپس برای هر $F \in \mathcal{K}_H$، $\phi * F = \phi * \mathbf{Re}\, F + \overline{\phi * \mathbf{Im} F} \in \mathcal{K}_H$ اگر و تنها اگر برای هر عدد حقیقی γ تابع $\phi + i\gamma z\phi'$ در جهت محور موهومی محدب شود.

لم ۳.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم h و ϕ در $\mathbb{D}$ تحلیلی محدب و g هم در آنجا تحلیلی باشد چنانکه $|g'(z)| < |h'(z)|$ برای $z \in \mathbb{D}$. آنگاه برای هر $|\epsilon| \leqslant ۱$،

$$(\phi+\epsilon\overline{\phi}) * (h+\overline{g}) \in \mathcal{C}_H$$

قضیه ی زیر نیز شرط لازم و کافی برای اینکه تابعی در توابع همساز ستاره‌گون واقع شود را بیان می دارد:

قضیه ۱.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f = h+\overline{g} \in \mathcal{S}_H$ سپس $f \in \mathcal{S}_H^*$ اگر و تنها اگر

$$h(z) * \frac{z+\frac{۱}{۲}(\zeta-۱)z^۲}{(۱-z)^۲} - \overline{g(z)} * \frac{\zeta\overline{z}-\frac{۱}{۲}(\zeta-۱)\overline{z}^۲}{(۱-\overline{z})^۲} \neq \circ \quad ; \quad |\zeta| = ۱,\ \circ < |z| < ۱$$

نتیجه ۱.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f = h+\overline{g} \in \mathcal{S}_H$، اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| + \sum_{n=۱}^{\infty} n|b_n| \leqslant ۱$$

آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^*$.

قضیه ی زیر نیز شرط لازم و کافی برای آنکه تابع همسازی محدب باشد را عنوان می کند:

[۴۲] Salinas

قضیه ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) فرض کنید $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H$، سپس $f\in\mathcal{K}_H$ اگر و تنها اگر

$$h(z)*\frac{z+\zeta z^{2}}{(1-z)^{3}}+\overline{g(z)}*\frac{\zeta\overline{z}+\overline{z}^{2}}{(1-\overline{z})^{3}}\neq 0\ ;\ |\zeta|=1,\ 0<|z|<1$$

نتیجه ۲.۹.۲. (آهوجا و دیگران [۲]) گیریم $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H$، اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|a_n|+\sum_{n=1}^{\infty}n^{2}|b_n|\leqslant 1$$

دراینصورت $f\in\mathcal{K}_H$.

کومار[۴۳] و دیگران [۵۱] هم برخی نتایجی را بر اساس نامساوی هایی که روی ضرایب توابع همساز محدب ۱.۷.۲ برقرار است را بدست آوردند (۲۰۱۲) که نتایج مفیدی از پیچش دربرداشت:

لم ۴.۹.۲. [۵۱] فرض کنید که f ، F و $f*F$ به ترتیب دارای نمایش هایی بفرم ۱۶.۲ـ ۱۸.۲ باشند، در اینصورت

- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*\circ}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|b_n|\leqslant 1-|b_1|$ و $F\in\mathcal{K}_H$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}n^{2}|b_n|\leqslant 1-|b_1|$ و $F\in\mathcal{K}_H$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*}$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{S}_H^{*\circ}(\alpha)$.
- اگر $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{2}(n-\alpha)}{1-\alpha}|a_n|+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^{2}(n+\alpha)}{1-\alpha}|b_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$، آنگاه $f*F\in\mathcal{K}_H^{\circ}$.
- فرض کنید $\sum_{n=2}^{\infty}n^{3}|a_n|\leqslant 1$ و $F\in\mathcal{K}_H$، اگر $f*F$ موضعاً تک ارز باشد، آنگاه $f*F\in\mathcal{C}_H$.

اگر $f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H^{\circ}$ قرص $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه راست $\{w:\mathbf{Re}\,w>\frac{1}{2}\}$ بنگارد، سپس باید در $h+g=\dfrac{z}{1-z}$ صدق نماید.

مجموعه توابع $f=h+\overline{g}$ که $\mathbb{D}$ را به نیم صفحه راست $R=\{w:\mathbf{Re}\ w>-\frac{1}{2}\}$ می نگارد دارای شکل کلی

$$h(z)+g(z)=\frac{z}{1-z}$$

است که $\dfrac{z}{1-z}$ تابع اکستریمال رده ی $\mathcal{K}$ است و این توابع $\mathbb{D}$ را به نوار عمودی

$$R=\left\{w:\frac{\alpha-\pi}{2\sin\alpha}<\mathbf{Re}\ w<\frac{\alpha}{2\sin\alpha}\right\}\tag{۱۹.۲}$$

[۴۳] Kumar

می نگارند و دارای شکل کلی زیرند:

$$h(z) + g(z) = \frac{1}{2i \sin\alpha} \log \frac{1 + ze^{i\alpha}}{1 + ze^{-i\alpha}}$$

لم ۵.۹.۲. (دورف[44] [۲۸]) فرض کنید $f_1 = h_1 + \overline{g_1} \in \mathcal{K}_H^\circ$ با $h_1 + g_1 = \frac{z}{1-z}$ و نیز $f_2 = h_2 + \overline{g_2} \in \mathcal{K}_H^\circ$ با $h_2 + g_2 = \frac{z}{1-z}$ باشد. اگر $f_1 * f_2$ موضعا تک ارز و جهت نگهدار باشند، آنگاه $f_1 * f_2 \in \mathcal{S}_H^\circ$ و محدب در جهت محور طولهاست.

۱۰.۲ زیررده هائی مرتبط با پیچش

بین سالهای ۱۹۹۸ و ۲۰۰۸، زیررده هایی از $\mathcal{S}_H$ توسط مولفانی معرفی و بررسی شد مانند جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸)، جهانگیری ([۴۷]، ۱۹۹۹)، جهانگیری، مورگورومورثی[45] و وی جی[46] ([۴۸]، ۲۰۰۲)، آهوجا، جهانگیری و سیلورمن ([۲]، ۲۰۰۳)، مورگورومورثی ([۶۶]، ۲۰۰۳)، یالسین[47]، اوزترک[48] و یامانکارادنیز[49] ([۱۱۹]، ۲۰۰۷) و نیز الشقصی[50] و داروس[51] ([۸]، [۹]، ۲۰۰۸) که هر کدام به نوعی در یافتن شروطی لازم و کافی در زیررده های معرفی شده کوشیدند. در ۲۰۱۰، علی[52]، استفان[53] و سوبرامانیان[54] زیررده ای از $\mathcal{S}_H$ را معرفی کردند که اکثر زیررده های قبل را بعنوان حالتی خاص در بر می گرفت. آنها تعریف زیر را ارائه دادند [۶]:

تعریف ۱.۱۰.۲. فرض کنید σ ثابتی حقیقی بوده و $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ تابعی مفروض است که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی می باشد. تابع همساز $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$ متعلق به رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi, \sigma, \alpha)$ است اگر

$$\mathbf{Re} \left\{ \frac{z(h*\phi)'(z) - \sigma \overline{z(g*\phi)'(z)}}{(h*\phi)(z) + \sigma \overline{(g*\phi)(z)}} \right\} > \alpha \ , \ z \in \mathbb{D} \qquad (۲۰.۲)$$

که $0 \leqslant \alpha < 1$.

این تعریف در حالات خاصی زیررده های قبلی را شامل می شود مثلاً

[44] Dorff
[45] Murugusundaramoorthy
[46] Vijaya
[47] Yalçin
[48] Öztürk
[49] Yamankaradeniz
[50] Al-Shaqsi
[51] Darus
[52] Ali
[53] Stephen
[54] Subramanian

$\mathcal{S}_H^{*\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{1-z}, 1, 0\right)$ سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸).

$\mathcal{K}_H^\circ = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{(1-z)^2}, 1, 0\right)$ سیلورمن ([۹۶]، ۱۹۹۸).

$\mathcal{S}_H^{*\circ} = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{1-z}, 1, \alpha\right)$ جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، ([۴۷]، ۱۹۹۹).

$\mathcal{K}_H^\circ = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{(1-z)^2}, -1, \alpha\right)$ جهانگیری ([۴۶]، ۱۹۹۸)، ([۴۷]، ۱۹۹۹).

$H(p,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} n^p z^n, (-1)^p, \alpha\right)$ که عملگر سالاگان[۵۵] تغییریافته است که توسط جهانگیری، موروگوروموزثی و وی جی مطالعه شد ([۴۸]، ۲۰۰۲).

$R_H(\lambda,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(\frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}, 1, \alpha\right)$ به شرط $\lambda > -1$ که شامل عملگر مشتق روشه ویه است و توسط موروگوروموزثی بررسی شد ([۶۶]، ۲۰۰۳).

$H(p,\alpha) = \mathcal{S}_H^\circ\left(z + \sum_{n=2}^{\infty} n^p C(\lambda,n) z^n, (-1)^p, \alpha\right)$ که $C(\lambda,n) = \frac{(\lambda+1)_{n-1}}{(n-1)!}$ و $(\lambda+1)_{n-1} = (\lambda+1)(\lambda+2)\cdots(\lambda+n-1)$ که بدینصورت رده ی $M_H(1,\lambda,\alpha)$ را مشخص می کند که توسط الشقصی و داروس مطالعه شد ([۸، ۹]، ۲۰۰۸).

در واقع رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ این تعداد از زیررده های قبلی را روی توابع همساز متحد و یکپارچه می کند و نتایج زیر را بدست می دهد:

قضیه ۲.۱۰.۱. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$، سپس $f \in \mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر

$$(h*\phi)*\left[\frac{z + \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right] - \sigma\overline{(g*\phi)*\left[\frac{\frac{x+\alpha}{1-\alpha}\overline{z} - \frac{x+2\alpha-1}{2-2\alpha}\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}\right]} \neq 0 \;;\; |x| = 1 \,,\, |z| \neq 0. \qquad (۲.۲۱)$$

شرطی کافی برای آنکه تابع همسازی در رده ی $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ قرار گیرد عبارتست از

قضیه ۲.۱۰.۲. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$، آنگاه $f \in \mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-\alpha}{1-\alpha}|a_n||\phi_n| + |\sigma| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\alpha}{1-\alpha}|b_n||\phi_n| \leqslant 1. \qquad (۲.۲۲)$$

علاوه بر این، مولفان مذکور مجموعه ای دیگر از توابع همساز را که قبلا توسط مولفان دیگر بررسی شده بود را یکپارچه نمودند. این رده ها شامل رده هائی از توابع تحلیلی محدب یکنواخت و توابع ستاره‌گون سهموی هستند [۸۷]. چنین زیررده هائی از توابع همساز شامل رده های $G_H(\alpha)$ و $GK_H(\alpha)$ از توابع همساز نوع گودمن ـ رونینگ[۵۶] هستند که در [۸۹، ۹۰] مطالعه

[۵۵] Salagean

[۵۶] Goodman-Rønning-type harmonic functions

شده و نیز رده های $RS_H(p,\gamma)$ [۱۱۹] و $M_H(n,\alpha)$ [۹] است که به ترتیب شامل عملگر نوع سالاگان[۵۷] و عملگر روشه ویه[۵۸] هستند. سپس تعریف زیر ارائه شد:

تعریف ۲.۱۰.۲. گیریم σ ثابتی حقیقی بوده و $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n z^n$ تابعی مفروض باشد که روی $\mathbb{D}$ تحلیلی است. تابع همساز $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^{\circ}$ در رده ی $\mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ است اگر

$$\mathbf{Re}\left\{(1+e^{i\gamma})\frac{z(h*\phi)'(z) - \sigma \overline{z(g*\phi)'(z)}}{(h*\phi)(z) + \sigma\overline{(g*\phi)(z)}} - e^{i\gamma}\right\} > \alpha \quad ; \quad z \in \mathbb{D} \qquad (۲۳.۲)$$

با $\gamma \in \mathbb{R}$ و $0 \le \alpha < 1$.

قضیه ۳.۱۰.۲. ([۶]) فرض کنید $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^{\circ}$. آنگاه $f \in \mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر

$$(h*\phi)*\left[\frac{z + \frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+2\alpha-1}{2-2\alpha}z^2}{(1-z)^2}\right] - \sigma\overline{(g*\phi)}*\left[\frac{\frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+\alpha}{1-\alpha}\overline{z} - \frac{(x+1)e^{i\gamma}+x+2\alpha-1}{2-2\alpha}\overline{z}^2}{(1-\overline{z})^2}\right] \neq 0 \ ; \ |x| = 1 \,,\ |z| \neq 0. \qquad (۲۴.۲)$$

قضیه ۴.۱۰.۲. ([۶]) گیریم $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^{\circ}$، سپس $f \in \mathcal{SP}_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1-\alpha}{1-\alpha}|a_n||\phi_n| + |\sigma|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n+1+\alpha}{1-\alpha}|b_n||\phi_n| \leqslant 1. \qquad (۲۵.۲)$$

۱۱.۲ رده ی $\mathcal{T}_H$

چندین زیررده از توابع تحلیلی با ضرایب منفی توسط سیلورمن بررسی شد [۹۷]. یک اتحاد و یکپارچگی از توابع تحلیلی با ضرایب منفی pـ مقداری توسط [۴] معرفی شد که روی پیچش عمل می کردو شامل چند زیررده از توابع تحلیلی با ضرایب منفی بود که قبلا مطالعه شده بودند.

گیریم $\mathcal{T}_H(\alpha)$ زیررده ای از $\mathcal{S}_H$ شامل تمام توابع همساز $f = h + \overline{g}$ است که که ضرایب ناصفرشان در بسط سری تابع تحلیلی h، از دومی به بعد منفی اند، یعنی

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n \quad , \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|z^n$$

و نیز در شرط زیر صدق می نمایند

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\arg\{f(re^{i\theta})\} \ge \alpha$$

[۵۷] Salagean-type operator

[۵۸] Ruscheweyh operator

که $r < 1 = |z|$ و $0 \leqslant \alpha < 1$. این رده در ۱۹۹۹ توسط جهانگیری معرفی شد [۴۷].
اژی لارسی[۵۹] و سوداراسان[۶۰] [۳۵] رده ی $\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ از توابع همساز در $\mathcal{S}_H$ که در شرط

$$\mathbf{Re}\left\{(1+ke^{i\alpha})\frac{(z(h*\phi)' - \overline{z(g*\psi)'})}{z'((1-\lambda)z+\lambda((h*\phi)+\overline{(g*\psi)})} - ke^{i\alpha}\right\} \geq \gamma$$

برای همه α حقیقی صدق می کنند را بررسی نمودند (۲۰۱۳). در این تعریف $\phi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n z^n$، $\psi(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}\mu_n z^n$ با شروط $\lambda_n \geq 0$، $\mu_n \geq 0$، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$، $z' = \frac{\partial}{\partial\theta}(z = re^{i\theta})$، $0 \leqslant r < 1$، $0 \leqslant \theta < 2\pi$ و $0 \leqslant \gamma < 1$ تحلیلی اند. همچنین با فرض $\overline{\mathcal{S}_H^*}(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ نمایش رده ی $\mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$ شامل توابع $f = h + \overline{g} \in \mathcal{T}_H$ می شود.

ملاحظه ۱.۱۱.۲. بازای $\alpha = 0$،

$$\overline{\mathcal{S}_H^*}\left(\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z}, 1, \gamma, 1\right) = \mathcal{T}_H\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

لم ۱.۱۱.۲. [۳۵] فرض کنید تابع $f = h + g$ چنان باشد که h و g با (۲.۳) داده شده و نیز بگیرید

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n(1+k)-\lambda(k+\gamma)}{1-\gamma}\right)\lambda_n|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(1+k)+\lambda(k+\gamma)}{1-\gamma}\right)\mu_n|b_n| \leqslant 1$$

که $k \geq 0$، $\lambda_n \geq 0$، $\mu_n \geq 0$، $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$، $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$، α عدد حقیقی و اگر

$$n(1-\gamma) \leqslant \big(n(1+k)-\lambda(k+\gamma)\big)\lambda_n \leqslant \big(n(1+k)+\lambda(k+\gamma)\big)\mu_n$$

آنگاه f نگاشتی همساز تک ارز جهت نگهدار در $\mathbb{D}$ بوده و برای $\lambda = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$، $f \in \mathcal{S}_H^*(\phi,\psi,\lambda,\gamma,k)$.

اکنون توجه خود را به زیررده ی $TS_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ از $\mathcal{S}_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ معطوف می کنیم که شامل توابع همساز $f = h + \overline{g}$ به شکل

$$h(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \quad , \quad g(z) = \sigma\sum_{n=2}^{\infty}b_n z^n \quad ; \quad a_n \geq 0,\ b_n \geq 0 \qquad (۲۶.۲)$$

هستند. زیررده $TS_H^\circ(\phi,\sigma,\alpha)$ شامل حالات خاصی است که قبلا در [۸، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۶۶] مطالعه شده اند.

[۵۹] Ezhilarasi
[۶۰] Sudharsan

قضیه ۱.۱۱.۲. ([۶]) فرض نمائید $\phi(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \phi_n z^n$ با $\phi_n \geqslant ۰$ بوده و f به شکل ۲۶.۲ باشد. آنگاه $f \in TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n-\alpha}{۱-\alpha} a_n \phi_n + \sigma^۲ \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{n+\alpha}{۱-\alpha} b_n \phi_n \leqslant ۱. \tag{۲۷.۲}$$

یک کران ظریف برای $|f(z)|$ که $f \in TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ چنین بدست می آید:

نتیجه ۱.۱۱.۲. ([۶]) گیریم $\phi(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} \phi_n z^n$ با $\phi_n \geqslant \phi_۲ (n \geqslant ۲)$ بوده و $|\sigma| \geqslant \frac{۲-\alpha}{۲+\alpha}$ باشد. اگر $f \in TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ باشد سپس برای $|z| = r < ۱$

$$r - \frac{۱-\alpha}{(۲-\alpha)\phi_۲} r^۲ \leqslant |f(z)| \leqslant r + \frac{۱-\alpha}{(۲-\alpha)\phi_۲} r^۲ \tag{۲۸.۲}$$

این نتیجه بازای تابع $f(z) = z - \frac{۱-\alpha}{(۲-\alpha)\phi_۲} z^۲$ ظریف بوده و تساوی را برقرار می کند.

چنانکه پیداست برد توابع موجود در $TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ قرص $|w| < ۱ - \frac{۱-\alpha}{(۲-\alpha)\phi_۲}$ را می پوشانند. همچنین رده ی $TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ محدب بوده و نقاط اکستریمال رده ی $TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ را می توان چنین یافت:

قضیه ۲.۱۱.۲. ([۶]) گیریم

$$h_۱(z) := z \quad , \quad h_n(z) := z - \frac{۱-\alpha}{(n-\alpha)\phi_n} z^n \quad , \quad g_n(z) := z + \frac{۱-\alpha}{\sigma(n+\alpha)\phi_n} \bar{z}^n \tag{۲۹.۲}$$

برای $n = ۲, ۳, \cdots$. یک تابع $f \in TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ اگر و فقط اگر f را بتوان بصورت

$$f(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} (\lambda_n h_n + \gamma_n g_n), \tag{۳۰.۲}$$

بیان کرد که $\lambda_n \geqslant ۰$، $\gamma_n \geqslant ۰$، $\lambda_۱ = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} (\lambda_n + \gamma_n)$ و $\gamma_۱ = ۰$ است. در حالت خاص نقاط اکستریم $TS_H^{\circ}(\phi,\sigma,\alpha)$ عبارتند از $\{h_n\}$ و $\{g_n\}$.

مراجع

[۱] سیلورمن هرب (۱۳۶۹)، **متغیرهای مختلط**، ترجمه محسن نقشینه ارجمند، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه اصفهان.

[2] Ahuja Om P., Jahangiri J. M. and Silverman H. (2003), ”Convolutions for special classes of harmonic univalent functions”, **Applied Mathematics Letters**, 16 (6), pp. 905-909.

[3] Ahuja Om P. (2005), ”Planar harmonic univalent and related mappings”, **J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 6 (4), Art-122.

[4] Ali R. M., Khan M. H., Ravichandran V. and Subramanian K. G. (2006), ”A class of multivalent functions with negative coefficients defined by convolution”, **Bull. Korean Math. Soc.**, 43 (1), 179-188.

[5] Ali R. M. and Ravichandran V. (2011), ”Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions”, **Mathematics Newsletter, Ramanujan Mathematical Society**, 21 (1), pp. 16-30.

[6] Ali R. M., Stephen B. A. and Subramanian K. G. (2010), ”Subclasses of harmonic mappings defined by convolution”, **Applied Mathematics Letters**, Vol. 23 (10).

[7] Al-Amiri H. and Mocanu P. T. (1981), ”Spirallike nonanalytic functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 82 (1), pp. 61-65.

[8] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Harmonic Functions Defined by Derivative Operator”, **J. Inequal. Appl.**, 10 pp. Art. ID 263413.

[9] Al-Shaqsi K. and Darus M. (2008), ”On Goodman-Ronning-Type harmonic univalent functions defined by Ruscheweyh operator”, **Int. Math.**, Forum 3, no. 44, pp.2161-2174.

[10] Azizi S., Ebadian A. and Najafzadeh Sh. (2015), ”Coefficient Estimates for a Subclass of Bi-univalent Functions”, **Comm. Adv. Comp. Sci. App.**, 1, pp. 41-44.

[11] Bazilevič I. E. (1955), ”On a case of integrability in quadratures in the Loewner-Kufarev equation” (Russian), **Mat. Sb. (N.S.)**, 37 (79)(3), pp. 471-476.

[12] Bieberbach L. (1916), ”Ober die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln”, **Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften**, pp. 940-955.

[13] Brannan D. A. and Clunie J. G. (1980), ”**Aspects of Contemporary Complex Analysis**”, Academic Press, NY.

[14] Brannan D. A., Clunie J. G. and Kirwan W. E. (1970), ”Coefficient estimates for a class of starlike functions”, **Can. J. Math.**, 22, pp. 476-485.

[15] Brannan D. A. and Kirwan W. E. (1969), ”On some classes of bounded univalent functions”, **J. London Math. Soc.**, 1 (2), pp. 431-443.

[16] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **Studia Univ. Babes-Bolyai Math.**, 31 (2), pp. 70-77.

[17] Brannan D. A. and Taha T. S. (1986), ”On some classes of bi-univalent functions”, **KFAS Proceedings Series, v. 3, Pergamon Press (Elsevier Science Limited), Oxford**, pp. 53-60.

[18] Brown J. E. (1989), ”Images of disks under convex and starlike functions”, **Math. Z.**, 202 (4), pp. 457-462.

[19] Çaglar M., Deniz E. and Srivastava H. M. (2017), ”Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions”, **Turkish J. Math.**, 41, pp. 694-706.

[20] Çaglar M., Orhan H. and Yagmur N. (2012), ”Coefficient Bounds For New Subclasses of Bi-Univalent Functions”, **Faculty Sci. Math. Uni. Nis, Serbia**, 27 (7), pp. 1165-1171.

[21] Chen M. (1975), ”On the regular functions satisfying $\mathbf{Re}\,\frac{f(z)}{z} > \alpha$”, **Bull. Inst. Math. Acad. Sinica**, 3, pp. 65-70.

[22] Catas A., Oros G. I. and Oros G. (2008), ”Differential subordinations associated with multiplier transformations”, **Abstr. Appl. Anal.**, ID 845724:1-11.

[23] Chichra P. N. (1977), ”New subclasses of the class of close-to-convex functions”, **Proc. Am. Math. Soc.**, 62, pp. 37-43.

[24] Chuaqui M., Duren P. and Osgood B. (2004), ”Curvature properties of planar harmonic mappings”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 4 (1), pp. 127-142.

[25] Clunie J. and Sheil-Small T. (1984), ”Harmonic Univalent Functions”, **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.**, 9 (2), pp. 3-25.

[26] de Branges L. (1985), ”A proof of the Bieberbach conjecture”, **Acta Mathematica**, 154, pp. 137-152.

[27] Ding S. S., Ling Y. and Bao G. J. (1995), ”Some properties of a class of analytic functions”, **J. Math. Anal. Appl.**, 195 (1), pp. 71-81.

[28] Dorff M. (2001), ”Convolutions of planar harmonic convex mappings”, **Comp. Var. Theory Appl.**, 45 (3), pp. 263-271.

[29] Dorff M., Nowak M. and Woloszkiewicz M. (2012), ”Convolutions of harmonic convex mappings”, **Complex Variables and Elliptic Equations**, 57 (5), pp. 489-504.

[30] Duren P. L. (2004), ”**Harmonic Mappings in the Plane**”, Cambridge Tracts in Mathematics, 156, Cambridge University Press, Cambridge.

[31] Duren P. L. (1983), ”**Univalent Functions**”, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo.

[32] Dziok J. and Srivastava H. M. (1999), ”Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function”, **Appl. Math. Comput.**, 103, pp. 1-13.

[33] Eenigenburg P. J., Miller S. S., Mocanu P. T. and Reade M. O. (1974), ”On a subclass of Bazilevič functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 45, pp. 88-92.

[34] El-Ashwah R. M. (2014), ”Subclasses of bi-univalent functions defined by convolution”, **J. Egypt. Math. Soc.**, 22 (3), pp. 348-351.

[35] Ezhilarasi R. and Sudharsan T. V. (2013), ”A Subclass of Harmonic Functions Associated with a Convolution Structure”, **Ann. Pure & App. Math.**, 4 (2), pp. 182-191.

[36] Frasin B. A. and Aouf M. K. (2011), ”New subclasses of bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett.**, 24, pp. 1569-1573.

[37] Ganenkova E. and Starkov V. V. (2015), ”Regularity theorems for harmonic functions”, **J. Appl. Anal.**, 21 (1), 1-12.

[38] Garabedian P. R. and Schiffer M. (1955), ”A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 4, pp. 427-455.

[39] Gilman J. P., Kra I. and Rodr guedriguez R. E. (2007), ”**Complex Analysis**”, Springer.

[40] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Convex Functions”, **Ann. Polon. Math.**, 56, pp. 87-92.

[41] Goodman A. W. (1991), ”On Uniformly Starlike Functions”, **J. Math. Ana. & App.**, 155, pp. 364-370.

[42] Goodman A. W (1983)., ”**Univalent Functions**”, Polygonal, Washington, NJ.

[43] Hallenbeck D. J. and Ruscheweyh St. (1975), ”Subordination by convex functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 52, pp. 191-195.

[44] Hernandez R. and Martn M. J. (2013), ”Stable geometric properties of analytic and harmonic functions”, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 155 (2), pp. 343-359.

[45] Horowitz D. (1978), ”A Further Refinement for Coefficient Estimates of Univalent Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 71, 217-221.

[46] Jahangiri J. M. (1998), ”Coefficient bounds and univalence criteria for harmonic functions with negative coefficients”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect.**, A 52 (2), 57-66.

[47] Jahangiri J. M. (1999), ”Harmonic Functions Starlike in the Unit Disk”, **J. Math. Anal. Appl.**, 235 (2), pp. 470-477.

[48] Jahangiri J. M., Murugusundaramoorthy G. and Vijaya K. (2002), ”Salagean-type harmonic univalent functions”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 77-82 (electronic).

[49] Kim Y. C. and Ponnusamy S. (1999), ”Sufficiency for gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex”, **Internat. J. Math. Math. Sci.**, 22 (4), 765-773.

[50] Kulshrestha P. K. (1973), ”Generalized Convexity in Conformal Mappings”, **J. Math. anal. App.**, 3, pp. 441-449.

[51] Kumar R., Gupta S. and Singh S. (2012), ”Convolution Properties of Convex Harmonic Functions”, **Int. J. Open Prob. Compl. Anal.**, 4 (3), pp. 69-77.

[52] Kuroki K. and Owa S. (2011), ”Notes on new class for certain analytic functions”, **RIMS Kokyuroku**, 1772, pp. 21-25,.

[53] Lewandowski Z., Miller S. S. and Zlotkiewicz E. J. (1976), ”Generating functions for some classes of univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, vol. 56, pp. 111-117.

[54] Lewin M. (1967), ”On a coefficient problem for bi-univalent functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 18, pp. 63-68.

[55] Libera R. J. (1965), ”Some classes of regular univalent functions”, **Proceedings of the American Mathematical Society**.

[56] Lowner K. (1923), ”Untersuchungen tiber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises”, **Math. Ann.**, 89, pp. 102-121.

[57] Ma W. and Minda D. (1992), ”Uniformly convex functions”, **Ann. Polon. Math.**, 57, 165-175.

[58] MacGregor T. H. (1962), ”Functions whose derivative has a positive real part”, **Trans. Am. Math. Soc.**, 104, pp. 532-537.

[59] Markes E. P., Robertson M. S. and Scott W. T. (1962), ”On Products of Starlike Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 13, pp. 960-964.

[60] Marx A. (1932), ”Untersuchungen uber schlichte Abbildungen”, **Math. Ann.**, 107 (1), pp. 40-67.

[61] Merkes E. and Salmassi M. (1992), ”Subclasses of uniformly starlike functions”, **Internat. J. Math. & Math. Sci.**, 15 (3), pp. 449-454.

[62] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1993), ”Averaging operators and a generalized Robinson differential inequality”, **J. Math. Anal. Appl.**, 173, pp. 459-469.

[63] Miller S. S. and Mocanu P. T. (1996), ”A Class of Nonlinear Averaging Integral Operators”, **J. Math. Anal. Appl.**, 197, pp. 313-323.

[64] Mocanu P. T. (1980), ”Starlikeness and convexity for nonanalytic functions in the unit disc”, **Mathematica (Cluj).**, 22 (45), pp. 77-83.

[65] Motamednezhad A., Nosrati S. and Zaker S. (2019), ”Bounds for initial MacLaurin coefficients of a subclass of bi-univalent functions associated with subordination”, **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.**, 68 (1), pp. 125-135.

[66] Murugusundaramoorthy G. (2003), ”A class of Ruscheweyh-type harmonic univalent functions with varying arguments”, **Southwest J. Pure Appl. Math.**, (2) 90-95 (electronic).

[67] Netanyahu E. (1969), ”The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < ۱$”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 32 (2), pp. 100-112.

[68] Nezhmetdinov I. R. (1997), ”Classes of Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions as Dual Sets”, **J. Math. Anal. Appl.**, 216, pp. 40-47.

[69] Nosrati S. and Zireh A. (2018), ”On Starlike Harmonic Functions”, **TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics**, to appear.

[70] Nosrati S. and Zireh A. (2020), ”On Fully-Convex Harmonic Functions and their Extension”, **Bol. Soc. Paran. Mat.**, (3s.) 38 (2), pp. 51-60.

[71] Nunokawa M. and Sokol J. (2013), ”Strongly gamma-starlike functions of order alpha”, **Ann. Uni. Mariae Curie-Sklodowska Lublin-Polonia**, vol LXVII (2), pp. 43-51.

[72] Ozawa M. (1969), ”An elementary proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Kodai Math. Sere. Rep.**, 21, pp. 129-132.

[73] Pederson R. N. (1968), ”A proof of the Bieberbach conjecture for the sixth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 31, pp. 331-351.

[74] Pederson R. N. and Schiffer M. (1972), ”A proof of the Bieberbach conjecture of the fifth coefficient”, **Arch. Rational Mech. Anal.**, 45, pp. 161-193.

[75] Pólya G. and Schoenberg I. J. (1958), ”Remarks on de la Vallée Poussin means and convex conformal maps of the circle”, **Pacific J. Math.**, 8 (2), pp. 295-334.

[76] Pommerenke C. (1963), ”On starlike and close-to-convex functions”, **Proc. London Math. Soc.**, 3-13 (1), pp. 290-304.

[77] Pommerenke C. (1975), ”**Univalent Functions**”, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.

[78] Ponnusamy S. and Sairam Kaliraj A. (2014), ”Univalent harmonic mappings convex in one direction”, **Anal. & Math. Phys.**, 4 (3).

[79] Ponnusamy S., Prajapat J. K. and Sairam Kaliraj A. (2015), ”Uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings”, **J. Anal.**, 23, pp. 121-129.

[80] Ponnusamy S. and Rønning F. (1997), ”Duality for Hadamard products applied to certain integral transforms”, **Complex Variables: Theory and Appl.**, 32 (3), 263-287.

[81] Ponnusamy S. and Rønning F. (1998), ”Starlikeness properties for convolutions involving hypergeometric series”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska**, L II.1, 16, 141-155.

[82] Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. and Starkov V. V. (2016), ”Absolutely convex, uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings”, **Complex Variables and Elliptic Equations**, 61 (10), pp. 1418-1433.

[83] Porwal S. and Darus M. (2013), ”On a new subclass of bi-univalent functions”, **J. Egyptian Math. Soc.**, 21, pp. 190-193.

[84] Ravichandran V., Polatoglu Y., Bolcal M. and Sen A. (2005), ”Certain subclasses of starlike and convex functions of complex order”, **Hacet. J. Math. Stat.**, 34, pp. 9-15.

[85] Robertson M. S. (1936), ”On the theory of univalent functions”, **Ann. Math.**, 37, pp. 374-408.

[86] Rønning F. (1994), ”On uniform starlikeness and related properties of univalent functions”, **Comp. Var. Theory Appl.**, 24 (3-4), pp. 233-239.

[87] Rønning F. (1993), ”A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska**, Sect. A, 47 (13), pp. 123-134.

[88] Rønning F. (1993), ”Uniformly Convex Functions and a Corresponding Class of Starlike Functions”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 118 (1), pp. 189-196.

[89] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2001), ”Goodman-Rønning-type harmonic univalent functions”, **Kyungpook Math. J.**, 41 (1), 45-54.

[90] Rosy T., Stephen B. A., Subramanian K. G. and Jahangiri J. M. (2002), ”Goodman-type harmonic convex functions”, **J. Natur. Geom.**, 21 (1-2), 39-50.

[91] Ruscheweyh St. and Salinas L. (1989), ”On the preservation of direction-convexity and the Goodman-Saff conjecture”, **Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math.**, 14, pp. 63-73.

[92] Ruscheweyh St. and Sheil-Small T. (1973), ”Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture”, **Comment. Math. Helv.**, 48 (1), pp. 119-135.

[93] Sakaguchi K. (1959), ”On a certain univalent mapping”, **J. Math. Soc. Japan**, 11 (1), 72-75.

[94] Shanmugam T. N. and Lourthu M. J. (2013), ”Universally Prestarlike Functions of Complex Order”, **Int. Journal of Math. Analysis**, 7 (24), pp. 1155-1164.

[95] Sheil-Small T. (1990), ”Constants for Planar Harmonic Mappings”, **J. London Math. Soc.**, 2 (42), pp. 237-248.

[96] Silverman H. (1998), ”Harmonic Univalent Functions with Negative Coefficients”, **J. Math. Ana. Appl.**, 220 (1), 283-289.

[97] Silverman H. (1975), ”Univalent functions with Negative Coefficients”, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 51, pp. 109-116.

[98] Sim Y. J. and Kwon O. S. (2013), ”On Certain Classes of Convex Functions”, **Int. J. Math. & Math. Sci.**, Article ID 294378.

[99] Sobczak-Kneć M., Starkov V. V. and Szynal J. (2011), ”Old and new order of linear invariant family of harmonic mappings and the bound for Jacobian”, **Ann. Univ. Mariae Curie - Skodowska**, **LXV** (2), 191-20.

[100] Spacek L. (1933), ”Prispěvek k teorii funkei prostych”, **Čapopis Pest. Mat. Fys.**, 62, pp. 12-19.

[101] Srivastava H. M. and Bansal D. (2015), ”Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, **J. Egyptian Math. Soc.**, 23, pp. 242-246.

[102] Srivastava H. M., Bulut S., Ça□lar M. and Ya□mur N. (2013), ”Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Filomat**, 27 (5), pp. 831-842.

[103] Srivastava H. M., Eker S. Sumer and Ali M. Rosihan (2015), ”Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions”, **Filomat 29:8**, pp. 1839-1845.

[104] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2015), ”Coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Acta Univ. Apulensis Math. Inform.**, 23, pp. 153-164.

[105] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), ”Initial coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.**, 36, pp. 863-871.

[106] Srivastava H. M., Gaboury S. and Ghanim F. (2017), ”Coefficient estimates for some general subclasses of analytic and bi-univalent functions”, **Afr. Mat.**, 28, pp. 693-706.

[107] Srivastava H. M., Joshi B. S., Joshi S. and Pawar H. (2016), ”Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions”, **Palest. J. Math.**, 5, Special Issue, pp. 250-258.

[108] Srivastava H. M., Mishra A. K. and Gochhayat P. (2010), ”Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett**, 23 (10), pp. 1188-1192.

[109] Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Sivakumar R. (2014), ”Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **Tbilisi Math. J.**, 7, pp. 1-10.

[110] Stankiewicz J. (1966), ”Quelques problémes extrémaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées”, **Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska**, Sect. A, 20, pp. 59-75.

[111] Starkov V. V. (2004), ”Application of the linear invariance idea in the theory of harmonic mappings”, New order (in Russian), **Modern Problems of Function Theory and its Applications**, Saratov State University, Saratov, 173.

[112] Sugawa Toshiyuki and Wang li-Mei (2016), ”Notes on Convex Functions of Order alpha”, **Comput. Methods Funct. Theory**, 16 (1), pp. 79-92.

[113] Tang Huo, Srivastava H. M., Sivasubramanian S. and Gurusamy P. (2016), ”The Fekete-Szegö functional problems for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions”, **J. Math. Inequal.**, 10, pp. 1063-1092.

[114] Temme N. M. (1996), ”Special Functions. An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics”, New York: Wiley.

[115] Umezawa T. (1955), ”On the theory of univalent functions”, **Tohoku Math. J.**, 7 (2)(3), pp. 212-228 .

[116] Wilken D. R. and Feng J. (1980), ”A Remark on Convex and Starlike Functions”, **J. London Math. Soc.**, 2 (21), pp. 287-290.

[117] Xu Q.- H., Gui Y.- C. and Srivastava H. M. (2012), ”Coefficient estimates for a Certain subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Appl. Math. Lett.**, 25, pp. 990-994.

[118] Xu Q.- H., Xiao H. -G. and Srivastava H. M. (2012), ”A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems”, **Appl. Math. Comput.**, 218 (23), pp. 11461-11465.

[119] Yalçin S., Öztürk M. and Yamankaradeniz M. (2007), ”On the subclass of Salagean-type harmonic univalent functions”, **JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.**, 8 (2). Article 54.

[120] Zireh A. and Analouei Audegani E. (2016), ”Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions”, **Bull. Iranian Math. Soc.**, 42, pp. 881-889.

نمایه